GAZETA MATEMATICĂ
SERIA A
REVISTĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ

ANUL XXIV(CIII) **Nr. 3 / 2006**

Asupra poziţiei reciproce a graficelor exponenţialei şi logaritmului

de Constantin P. Niculescu şi Andrei Vernescu

1. În multe din cărţile de algebră sau de analiză care includ şi o prezentare a funcţiilor elementare, funcţia exponenţială $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$, $(0 < a \neq 1)$, împreună cu inversa ei, funcţia logaritmică în aceeaşi bază, $g = f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1} = \log_a$, atunci când au graficele trasate în acelaşi sistem de axe cartezian, le au doar pentru $a > 1$ şi, în plus, acestea sunt nesecante (fig. 1). (Desigur, ele sunt trasate simetric faţă de prima bisectoare, ceea ce este în concordanţă cu faptul binecunoscut că graficele a două funcţii inverse una alteia, prezintă această simetrie.)

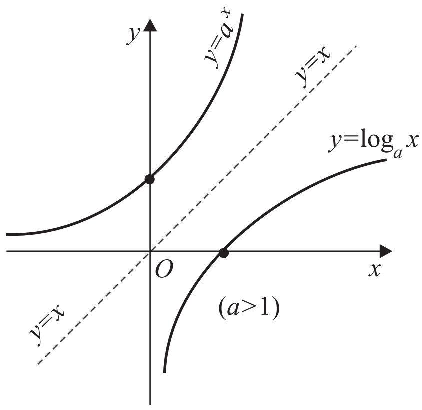

Fig. 1

Impresia falsă de „intangibilitate“ a acestor grafice este, probabil, accentuată şi de două consecinţe ale inegalităţilor binecunoscute:

$\mathrm{e}^x \geq x + 1,\ \ x \in \mathbb{R}$ (cu egalitate dacă şi numai dacă $x = 0$);

$\ln(x + 1) \leq x$, $x > -1$ (cu egalitate dacă şi numai dacă $x = 0$),

anume:

$$\ln(1 + x) < \mathrm{e}^x, \quad x > -1 \tag{1.1}$$

(v. fig. 2) şi:

$$\ln x < \mathrm{e}^x, \quad x > 0 \tag{1.2}$$

(v. fig. 3, caz particular al fig. 1 pentru $a = \mathrm{e}$).

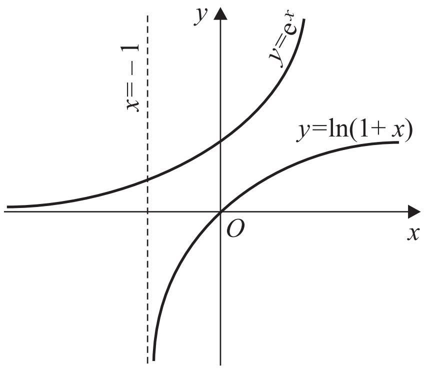

Fig. 2

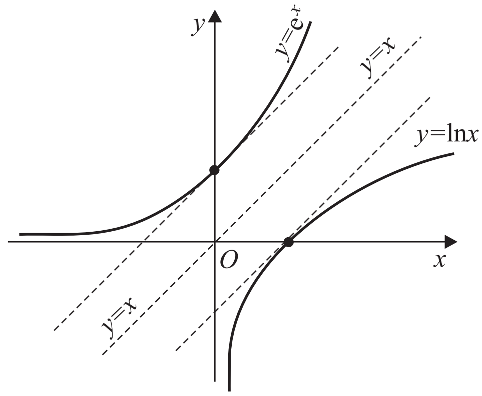

Fig. 3

Însă graficele exponenţialei şi logaritmului pot fi şi secante, ceea ce se întâmplă întotdeauna în cazul $a \in (0, 1)$ (v. fig. 4), ca şi – după cum vom preciza în curând – pentru anumite valori supraunitare ale bazei (v. fig. 6).

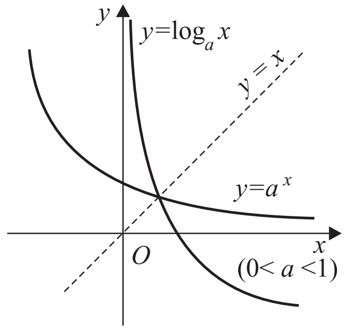

Fig. 4

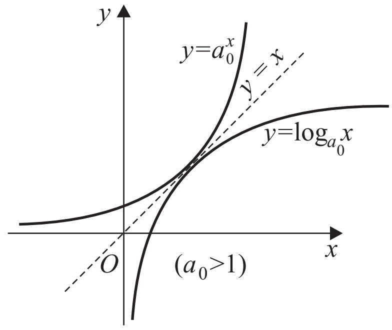

Fig. 5

Este deci plauzibil să presupunem că ar exista o valoare $a_0 > 1$, a bazei, pentru care graficele ar fi tangente (v. fig. 5).

2. În cele ce urmează ne propunem să aprofundăm poziţia relativă a graficelor exponenţialei şi logaritmului în aceeaşi bază supraunitară, precizând când acestea sunt nesecante (fig. 1 şi, în particular, fig. 3), tangente (fig. 5), respectiv secante (fig. 6).

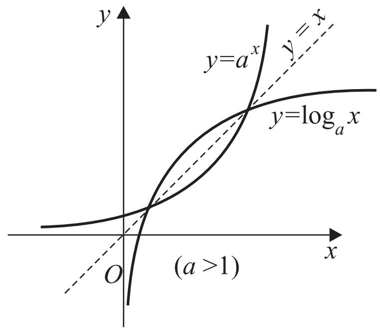

Fig. 6

Din experienţa generală a problemelor de contact al graficelor, suntem conduşi la a bănui că valoarea $a_0 > 1$ pentru care graficele sunt tangente, va separa în două intervale contigue I_1 şi I_2 valorile pentru care graficele sunt secante de cele pentru care graficele sunt nesecante. Din acest motiv, vom începe prin a căuta o astfel de valoare a_0 a bazei, pentru care graficele celor două funcţii sunt tangente.

Considerăm deci problema tangenţei graficelor funcţiilor $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$, cu $a > 1$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_a x$. Această problemă de tip cunoscut, a contactului (denumit de ordinul întâi) dintre cele două grafice, revine la determinarea unui punct $x_0 \in (0, \infty)$, astfel încât să fie satisfăcute condiţiile:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0), \end{cases} \tag{2.1}$$

adică:

$$\begin{cases} a_0^{x_0} = \log_{a_0} x_0 \\ a_0^{x_0} \ln a_0 = \dfrac{1}{x_0 \ln a_0}, \end{cases} \tag{2.1$'$}$$

înţelegându-se că trebuie găsită şi baza $a_0 > 1$, corespunzătoare.

3. Rezolvarea problemei va utiliza o tehnică specială. Astfel, stabilim:

Propoziţia 1. *Fie I şi J două intervale nevide, nedisjuncte, ale axei reale, $f : I \to J$ o funcţie bijectivă, strict crescătoare, iar $x_0 \in I \cap J$ abscisa unui punct de intersecţie $M_0(x_0, y_0)$ al curbelor de ecuaţii:*

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \qquad (x \in I \cap J). \tag{3.1}$$

Atunci $x_0 = y_0$ (adică punctul de intersecţie $M_0(x_0, y_0)$ se află pe bisectoarea întâi (fig. 7)).

Demonstraţie. Coordonatele x_0 şi y_0 verifică ecuaţiile (3.1), adică avem satisfăcute egalităţile:

$$\begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ y_0 = f^{-1}(x_0). \end{cases} \tag{3.1$'$}$$

Întrucât funcţia f este bijectivă, a doua egalitate (3.1$'$) este echivalentă cu egalitatea:

$$f(y_0) = x_0. \tag{3.2}$$

Să presupunem prin absurd că $x_0 \neq y_0$; fie $x_0 < y_0$. Aplicând funcţia strict crescătoare f, obţinem:

$$f(x_0) < f(y_0),$$

adică (în baza primei egalităţi (3.1$'$) şi a egalităţii (3.2)) obţinem:

$$y_0 < x_0.$$

Contradicţie!

Cazul în care $x_0 > y_0$ se tratează analog. ■

În continuare, pentru orice funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ (cu $I \subseteq \mathbb{R}$) vom nota cu G_f graficul său, adică:

$$G_f = \{(x, f(x) \mid x \in I\}.$$

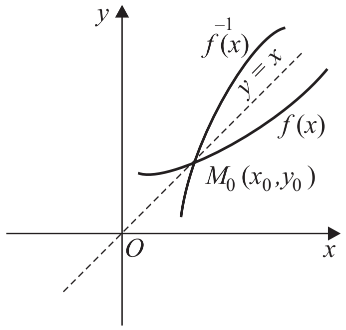

Fig. 7

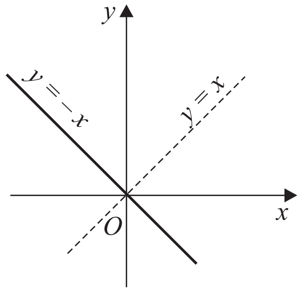

Fig. 8

Observaţia 1. Rezultatul din propoziţie nu mai rămâne cu necesitate valabil dacă funcţia bijectivă f este strict descrescătoare, ca, de exemplu, în cazul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ (v. fig. 8), pentru care G_f este bisectoarea a doua şi avem $f^{-1} = f$, deci $G_{f^{-1}} = G_f$, de unde $G_f \cap G_{f^{-1}} = G_f$, adică intersecţia este chiar întreaga bisectoare a doua. Aşadar, pentru un punct oarecare $M_0(x_0, y_0) \in G_f \cap G_{f^{-1}}$ nu mai are loc, cu necesitate, egalitatea $x_0 = y_0$.

Un alt contraexemplu în acest sens îl constituie funcţia $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = 1 - x$ (v. fig. 9).

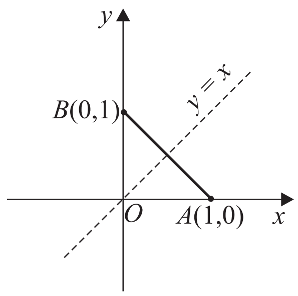

Fig. 9

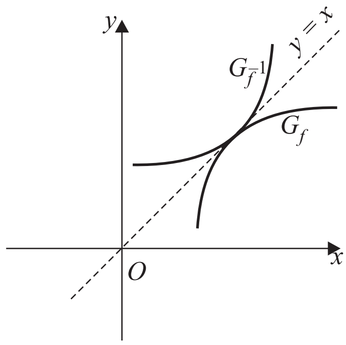

Fig. 10

Observaţia 2. Dacă, în condiţiile propoziţiei, contactul graficelor funcţiilor f şi f^{-1} este, în plus, un contact de tangenţă, iar funcţia f este strict convexă (deci f^{-1} este strict concavă) sau invers, atunci punctul lor de tangenţă este unic (v. fig. 10). Explicaţia acestui fapt constă în poziţia faţă de tangentă a graficului unei funcţii convexe, respectiv concave (a se vedea [2], [3], [4] şi [5]).

În cazul în care f nu este convexă (respectiv concavă), unicitatea punctului de tangenţă a graficelor G_f şi $G_{f^{-1}}$ nu mai este asigurată (v. fig. 11; mulţimea $G_f \cap G_{f^{-1}}$ este formată *din două puncte*).

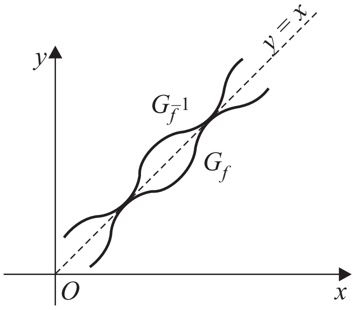

Fig. 11

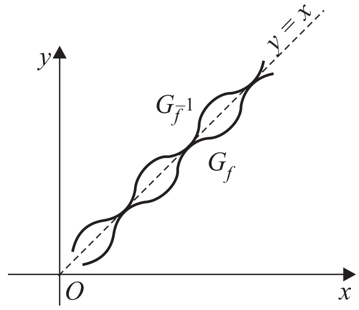

Fig. 12

În fig. 12, obţinută prelungind în mod indefinit de-a lungul primei bisectoare „motivul“ din fig. 11, mulţimea $G_f \cap G_{f^{-1}}$ este *numărabilă*.

În sfârşit, în fig. 13, deşi funcţia f este concavă (deci f^{-1} este convexă), iar intersecţia graficelor restricţionată la segmentul (AB) este o intersecţie de tangenţă, intersecţia graficelor în totalitatea sa, de asemenea, nu se realizează într-un singur punct, ci în toate punctele segmentului $[AB]$, adică într-o infinitate de puncte *de puterea continuului*. Explicaţia constă în faptul că în punctele A şi B intersecţia graficelor nu este o intersecţie de tangenţă, adică nu este un contact de ordinul întâi (deoarece nici una din cele două funcţii poligonale f şi f^{-1} nu este derivabilă în punctele a, respectiv b).

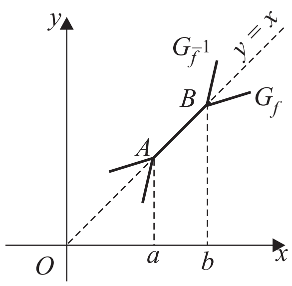

Fig. 13

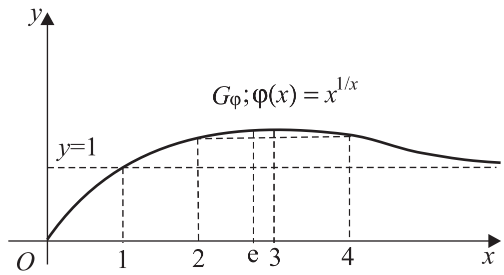

Fig. 14

4. Revenim la problema de tangenţă pe care ne-am pus-o la început, aşa cum a fost formulată în secţiunile 1 şi 2.

Ţinând seama că funcţia exponenţială în baza $a > 1$ este strict crescătoare, putem aplica propoziţia 1 şi deducem că, pentru ca un punct $M_0(x_0, y_0)$ să fie punct de tangenţă (deci, în primul rând, de contact) între graficele funcţiilor $x \mapsto f(x) = a^x$ şi $x \mapsto f^{-1}(x) = \log_a x$ $(x > 0)$, în afară de satisfacerea primei ecuaţii $(2.1')$, coordonatele sale trebuie să satisfacă şi o ecuaţie de apartenenţă a punctului la prima bisectoare, adică:

$$a^{x_0} = x_0 \tag{4.1}$$

şi, în plus, soluţia acestei ecuaţii trebuie să fie unică. Ecuaţia (4.1) este echivalentă cu:

$$a = x_0^{1/x_0}. \tag{4.2}$$

Studiul funcţiei $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $\varphi(x) = x^{1/x}$, cu mijloacele uzuale ale calculului diferenţial (la nivelul clasei a XI-a), conduce la constatarea că φ are un maxim (unic), egal cu $\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ (atins pentru $x = \mathrm{e}$) (v. fig. 14). Deci:

$$x^{1/x} \le \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}, \quad \forall\, x > 0,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x = \mathrm{e}$ (v. şi [6]).

Deci, pentru ecuaţia (4.2), rezultă că:

(i) are soluţie unică $\Leftrightarrow a = \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$; (soluţia fiind $x_0 = \mathrm{e}$);

(ii) are două soluţii $\Leftrightarrow a \in \left(1, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}\right) \stackrel{\mathrm{def}}{=} I_1$;

(iii) nu are soluţii $\Leftrightarrow a \in \left(\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}, \infty\right) \stackrel{\mathrm{def}}{=} I_2$.

În concluzie, la cazul (i), care ne interesează, am obţinut că $a = \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$, iar $x_0 = \mathrm{e}$; aceste două valori satisfac şi a doua ecuaţie (2.1$'$). Altfel spus, am obţinut că:

> Dacă graficele exponenţialei şi logaritmului în aceeaşi bază a sunt tangente, atunci $a = \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$, iar punctul de tangenţă este $M_0(\mathrm{e}, \mathrm{e})$ (v. fig. 15).

Reciproc, dacă $a = \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$, atunci cele două grafice sunt tangente în punctul de abscisă $x_0 = \mathrm{e}$, după cum se verifică uşor prin înlocuire în (2.1$'$).

Cazurile (ii) şi (iii) ne arată că, pentru $1 < a < \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$, cele două grafice au două puncte de intersecţie, respectiv pentru $a > \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ nu au nici un punct de intersecţie.

5. Putem acum da şi o interpretare geometrico-cinematică faptului că valoarea $a = a_0 = \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ separă bazele a pentru care graficele sunt secante de cele pentru care sunt nesecante în două intervale I_1 şi I_2, aşa cum am preconizat în secţiunea 2 şi am stabilit în secţiunea 4.

Să considerăm că dăm bazei a_0 o creştere înlocuind-o cu o altă bază $a > a_0$. În acest caz $\log_{a_0} a > 1$, de unde:

$$\log_a x = \frac{\log_{a_0} x}{\log_{a_0} a} < \log_{a_0} x, \tag{5.1}$$

deci logaritmul s-a micşorat; curba logaritmică în baza a_0 (v. fig. 15) a „coborât“ (trecând însă, în continuare prin punctul $A(1, 0)$, comun tuturor curbelor logaritmice[1])).

În fig. 15 curba logaritmică a devenit cea punctată. Totodată, când am dat o creştere bazei, de la valoarea a_0 la valoarea a, a decurs că:

$$a^x = \left(a_0^{\log_{a_0} a}\right)^x = = a_0^{x \log_{a_0} a} > a_0^x, \tag{5.2}$$

deci exponenţiala s-a mărit; curba exponenţială a „urcat“ (trecând, în continuare, prin punctul $B(0, 1)$, comun tuturor exponenţialelor[2]) (v. din nou fig. 15, unde şi curba exponenţială a devenit cea punctată).

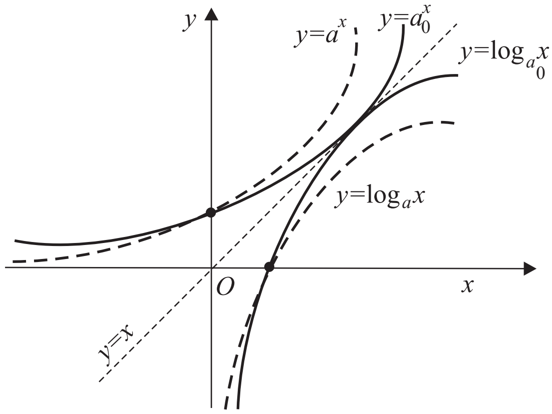

Fig. 15

Deci curbele s-au „îndepărtat“ una de alta şi au devenit nesecante.

Analog, dacă dăm bazei a_0 o descreştere (rămânând însă supraunitară), curba logaritmică „urcă“, iar cea exponenţială „coboară“, deci ele „se apropie“ una de alta, devenind secante, în două puncte (ca în fig. 6).

6. Chestiunea studiată în lucrarea de faţă apare în [1] (problema 43.9*, pag. 449), unde se dă răspunsul corect $a = \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$, $x_0 = \mathrm{e}$ (pag. 519), dar după o analiză superficială (nu este suficient de argumentată apartenenţa la prima bisectoare a punctului de intersecţie dintre graficul unei funcţii f şi al inversei f^{-1}, în cazul considerat); propoziţia 1 şi contraexemplele ce au urmat-o au dat toată argumentarea necesară.

Problema contactului dintre curba exponenţială $y = a^x$, $a > 1$ şi dreapta de ecuaţie $y = x + 1$, este tratată detaliat în [7] pp. 208-221. Contactul este de tangenţă dacă şi numai dacă $a = \mathrm{e}$; dacă $a \neq \mathrm{e}$ curba este secantă dreptei; sunt date şi parametrizări ale intersecţiei.

În sfârşit, problema contactului dintre curbele de ecuaţii $y = a^x$ şi $y = x^a$ $(a > 1)$ este pusă în [8]. În [7] pp. 245-247 sunt prezentate patru rezolvări; avem tangenţă dacă şi numai dacă $a = \mathrm{e}$.

---

1) Transformarea suferită de curba logaritmică nu este o rotaţie în jurul punctului $A(1, 0)$ ci, datorită relaţiei (5.1), este omotetia de raport numărul subunitar $\dfrac{1}{\log_{a_0} a}$ (şi de centru sau punct fix, $A(1, 0)$). (N.A.)

2) În cazul exponenţialei, apare o omotetie de raport supraunitar $\log_{a_0} a$, dar aceasta doar la exponent. (N.A.)

Bibliografie

[1] V. Nicula, *Analiză matematică pentru clasa a XI-a, Teorie, exerciţii şi probleme*, Editura Teora, Bucureşti, 1999.
[2] C. P. Niculescu, *Fundamentele Analizei Matematice*, Editura Academiei, Bucureşti, 1996.
[3] C. P. Niculescu, L.E. Persson, *Convex Functions, Basic Theory and Applications*, Editura Universitaria, Craiova, 2003.
[4] C. P. Niculescu, A. Vernescu, *Lectura Graficului: maximul funcţiilor convexe*, partea I, Gazeta Matematică **109** (2004), nr. 9, pp. 321-325.
[5] C. P. Niculescu, A. Vernescu, *Lectura Graficului: maximul funcţiilor convexe*, partea a II-a, Gazeta Matematică **110** (2005), nr. 3, pp. 97-103.
[6] A. Vernescu, *A Dualization of the Class of the Transcendental Numbers*, Octogon Mathematical Magazine, **9** (No. 1. B), 2001, pp. 348-354.
[7] A. Vernescu, *Numărul e şi matematica exponenţialei*, Editura Universităţii din Bucureşti, Bucureşti, 2004.
[8] F. Vulpescu-Jalea, *Problema 19.832*, Gazeta Matematică **88** (1983) nr. 3, pag. 334.

Universitatea din Craiova
Facultatea de Matematică-Informatică
Str. Al. I. Cuza, nr. 13
200585 Craiova

Universitatea Valahia din Târgovişte
Catedra de Matematică
Bd. Unirii, nr. 118
130082 Târgovişte

A problem of Dan Barbilian

BY DUMITRU MIHALACHE

To my former fellow teacher,
Mr. *Vasile Ţugulea*,
who guided me generously
at the beginning of my career

Thus, through many various kinds of numbers are included in the holy books certain mysterious resemblances which, because of the poor knowledge of numbers, are unaccessible to the readers.

De doctrina christiana - Saint Augustin

1. Introduction. In the book [2] (vol. I, pp. 41-42) *Dan Barbilian* notices the following about the set of the non-zero quaternions having rational coefficients:

$$\mathcal{H}^* = \{u = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q},\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0\}$$